# UNIDAD 1: Números y Operaciones

## LOS NÚMEROS NATURALES

Históricamente, los primeros números con que se disponía para contar cosas, fueron los números naturales. Éste "conjunto" de números está constituido por 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, ....

Se identifica a éste conjunto numérico con la letra *N*, simbólicamente tenemos:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Para indicar que, por ejemplo, 5 pertenece a los *N*, usamos $5 \in N$, donde $\in$ es el símbolo de pertenencia y se lee "*5 pertenece al conjunto de los números naturales*".

Es fácil representar a los números naturales en la llamada recta numérica mediante puntos, fijando un origen (el cero), una unidad y una escala.

Cada número natural tiene la característica de ser par ó impar, pero no puede ser ambas cosas a la a la vez.

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ... son los naturales pares

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ... son los números impares

**<u>Actividad 1</u>: Responder**

**1) ¿Son los números naturales pares múltiplos de algún número? ¿Cómo los puedes generar?**

**2) ¿Se te ocurre alguna fórmula que genere los naturales impares?**

### Operaciones en el conjunto de los números naturales.

En el conjunto de los números naturales solo se podía sumar y multiplicar, y cada vez que sumamos o multiplicamos dos números naturales, el resultado también es un número natural. Esto se conoce como la Ley de Cierre de la suma y el producto de números naturales. Se dice entonces que el conjunto de los números naturales es cerrado para las operaciones de suma y producto.

Antes de continuar, en matemática cada vez que uno habla de una ley o de una definición, estamos diciendo que esas son las "reglas de juego" para tratar con la matemática y, por lo tanto, no se cuestionan ni es necesario demostrarlas, sino que se las acepta como verdaderas.

**<u>Actividad 2:</u> Responder:**

**¿Qué sucede con la resta o el cociente? ¿También al restar o dividir dos naturales obtengo siempre otro natural? Supongo que sabes que la respuesta es NO. Da algunos ejemplos.**

## LOS NÚMEROS ENTEROS

Según lo que vimos en la última actividad, al restar o dividir dos números naturales el resultado no siempre es natural. Eso es lo mismo que decir que el conjunto de los números naturales NO es cerrado con respecto a la resta y el cociente.

Tomemos en primer lugar el "problema" con la diferencia. Para solucionarlo es que se crea un nuevo conjunto denominado el de los Números Enteros, que agrega a los naturales, el cero y los números negativos y se expresa como:

$$Z = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ ...\}$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Números naturales (N)}\\ \{0\}\\ \text{Números entero negativos}\end{array}\right\} \quad \text{Números enteros (Z)}$$

La representación de los números enteros en la recta numérica se realiza mediante puntos al igual que los números naturales, teniendo en cuenta que los enteros positivos (o naturales), están ubicados a la derecha del cero, y los enteros negativos a la izquierda de éste.

## SIGNO Y MODULO DE UN NÚMERO ENTERO

Todo número entero distinto de 0 tiene un signo que puede ser + o -. El cero carece de signo. El módulo (o valor absoluto) de un número entero es su distancia en unidades con respecto al 0. El módulo de un número *x* se simboliza así: $|x|$.

Si te fijas con un poco de cuidado, podrás ver que a partir del cero, a derecha e izquierda, existe una cierta simetría. Por ejemplo, −2 es el simétrico del 2, pues ambos se encuentran a la misma distancia del cero. Se dice entonces que −2 es el *inverso aditivo* de 2, o también que 2 y -2 son *números opuestos*.

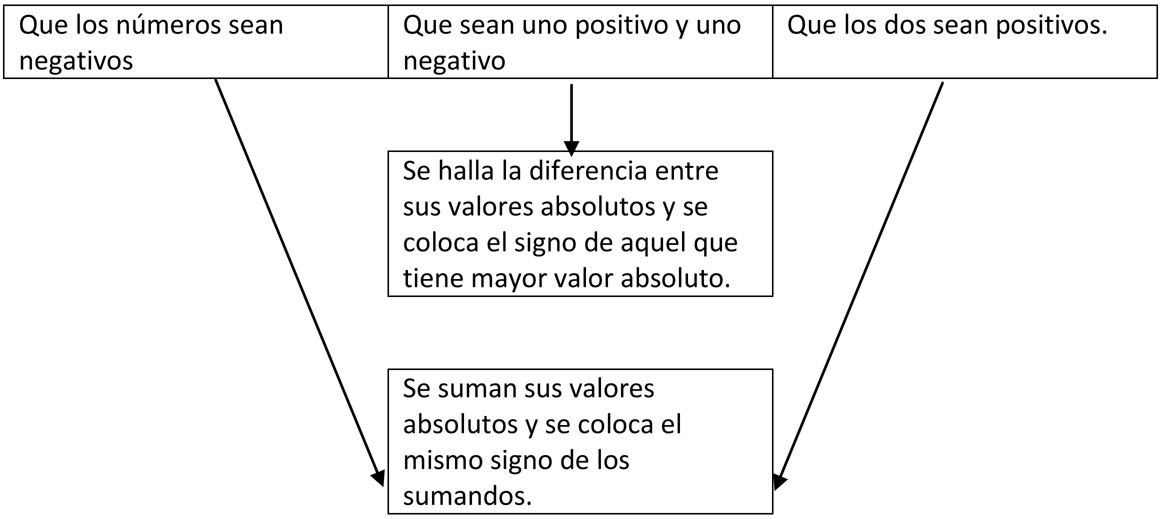
**<u>Actividad 3:</u> ¿Te animas a generalizar lo que acabamos de decir con letras?**

En los enteros también existe un número que al sumarlo a cualquier otro, no produce modificaciones en el resultado. Este número se denomina *neutro aditivo*.

**<u>Actividad 4:</u> ¿Quién crees que es ese número?**

## Operaciones en el conjunto de los números enteros

Para ***SUMAR*** dos números enteros puede suceder:




***RESTAR*** un número entero es lo mismo que sumar su opuesto.

En cuanto a la operación ***producto*** recordemos que:

- El producto de dos números de igual signo es positivo.
- El producto de dos números de distinto signo es negativo.

**<u>Actividad 5</u>: Completa la siguiente tabla:**

| *Operación* | *Resultado* |
|---|---|
| (-2)(3) | |
| (5)(3) | |
| (-2)(4) | |
| (-6)(-3) | |
| (5)(-4) | |

En este conjunto numérico se cumple la Ley de Cierre para las operaciones de suma, producto y resta, no ocurre lo mismo con el cociente.

**<u>Actividad 6</u>: ¿Cuándo se cumple que al dividir dos enteros el resultado también es entero? ¿Por qué?**

**<u>Actividad 7</u>: Pitágoras fue un filósofo y matemático griego. Aunque no se conoce con exactitud su origen, la mayor parte de sus biógrafos, entre ellos Porfirio, parecen coincidir en que nació y vivió sus primeros años en la isla Jonia de Samos, hacia 582a.C. a 507 a.C. (Wikipedia).**
**Ubica las fechas en las que el matemático griego nació y murió en una línea de tiempo y contesta:**
**a) ¿Cuántos años vivió?**
**b) ¿Cuántos años han transcurrido desde que murió hasta la fecha?**

**<u>Actividades</u>**:

1) Un cuadrado Mágico es cuadrado que cumple que la suma de los números de sus columnas, filas y diagonales es la misma. Completa los siguientes cuadrados mágicos:
   a. Suma = 15

| | | |
|---|---|---|
| 8 | | 4 |
| | 5 | |
| | | |

   b. Suma = 27

| | | |
|---|---|---|
| | 11 | 6 |
| | | |
| 12 | | |

2) Consideremos cuatro enteros pares consecutivos. Si el primero se representa por 2.n, ¿cómo representará cada uno de los siguientes?
   a. El tercer entero
   b. La suma del primero y el tercer entero
   c. La suma de los cuatro enteros.
3) Indique si las proposiciones dadas son verdaderas (V) o falsas (F).
   a. La suma de dos naturales cualesquiera es un número natural.
   b. La suma de dos enteros negativos cualesquiera es un entero negativo.
   c. La suma de dos enteros impares cualesquiera es un entero impar.
   d. Si $a + b = -c + a, entonces\ a = -c$
   e. Si $a + b = 0, entonces — a = b$
   f. Si $a + b > c + d, entonces\ a - c > d - b$
4) La temperatura en la ciudad A es de -15º, mientras que en la ciudad B es de – 22º. ¿En qué ciudad hace más frío?
5) El submarino P estuvo navegando a – 15m, mientras que el submarino Q lo hacía a - 23m. ¿Cuál de ellos estaba más lejos de la superficie?
6) Resuelve las siguientes operaciones:
   a. $|23| — 21 + |-5 - 18| =$
   b. $|64 - 31| — 25 + 11 + |6| =$
   c. $|43 - 21| + |-6 - 8| - |7 - 5 + 3| =$
   d. $2^2(3 - 5) + 2[3^2 - 4(-2) + 9: (-3)] - (-4)^3: (-2 - 6) =$
   e. $-(-4)^2: (-8) - (5 - 3.2 + 1) - \sqrt[3]{(-4).2} =$

# LOS NÚMEROS RACIONALES

Con el conjunto de los Números Enteros habíamos solucionado el “problema” de la operación resta, pero no así el del cociente, pues vimos que no siempre al dividir dos números enteros el resultado lo es. Entonces fue necesario crear otro conjunto en el cual el cociente esté definido. Este conjunto es el de los números racionales, llamados así por el término “razón” que significa cociente.

Dentro de este conjunto entran todos aquellos números que los puedo expresar como una fracción (la raya de fracción indica una división o cociente).

**<u>Actividad 8</u> ¿Te parece que los números enteros pueden ser expresados de esta forma?**

El conjunto de los números racionales se denota con la letra Q, y se expresa de la siguiente manera:

$$Q = \{\frac{a}{b} \text{ tale que } a, b \in Z \ y \ b \neq 0\}$$

Todas aquellas fracciones que son expresiones del mismo número racional se llaman *fracciones equivalentes*. Por ejemplo $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}$,... son todas expresiones de un mismo número racional y por lo tanto son fracciones equivalentes y podemos encontrar infinitas fracciones que representen tal número, para ello basta con que se multiplique numerador y denominador por un mismo número k ∈ N. En particular, de todas ellas, la fracción $\frac{2}{3}$, es llamada “*forma reducida*”, o “*fracción irreducible*”, puesto que se trata de la fracción obtenida luego de realizar todas las simplificaciones posibles.

Dentro de los números racionales existe un orden, es decir, dados dos números racionales, puedo saber cuál es el mayor. Es decir, si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, son dos números racionales distintos, vamos a decir que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ siempre que el producto de $a$ por $d$ sea menor que el producto de $b$ por $c$. En símbolos:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d < b.c \quad \text{con } b \text{ y } d \text{ positivos}$$

**<u>Actividad 9:</u> ¿Crees que es necesario la aclaración al final de que b y d son positivos? ¿Qué pasaría si no lo son? ¿Se seguiría cumpliendo la Ley de orden en los racionales?**

Una propiedad importante del conjunto de los números racionales es el de ser un conjunto denso, lo cual nos asegura de que dados dos números racionales distintos siempre podemos encontrar otro racional entre ellos. Por ejemplo, entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{2}{3}$, se encuentra el número racional calculado como $\frac{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}}{2}$

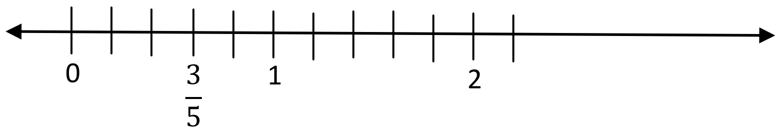
**<u>Actividad 10:</u> ¿Se cumplirá la propiedad con los números naturales y los enteros?**

## Representación de los números racionales.

Las fracciones pueden ***representarse gráficamente*** en esquemas como los siguientes:

Representar un número racional sobre ***la recta numérica*** ya no es tan sencillo como en el caso de los naturales. Veamos si eres capaz de representar $\frac{3}{5}$ siguiendo las siguientes instrucciones:

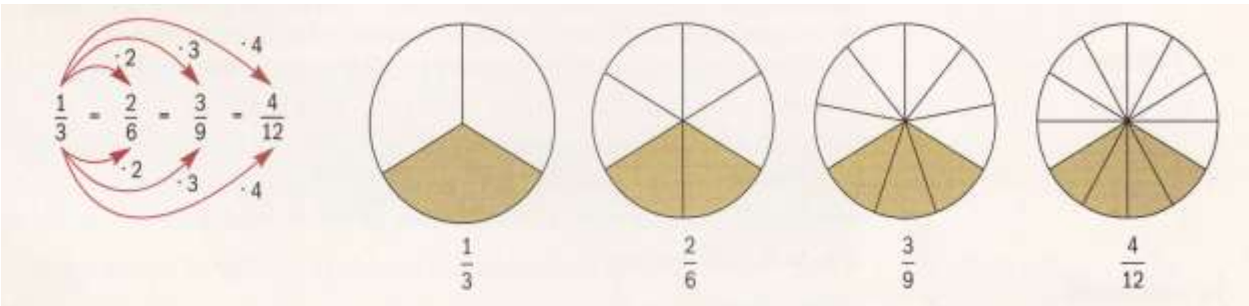
a) *Traza la recta numérica, ubica el cero en ella y selecciona una escala para determinar la unidad.*
b) *Se divide cada unidad en 5 partes iguales*
c) *De las 5 partes se toma 3. Entonces en la tercera marca sobre la recta numérica a partir del cero, se encuentra el número* $\frac{3}{5}$



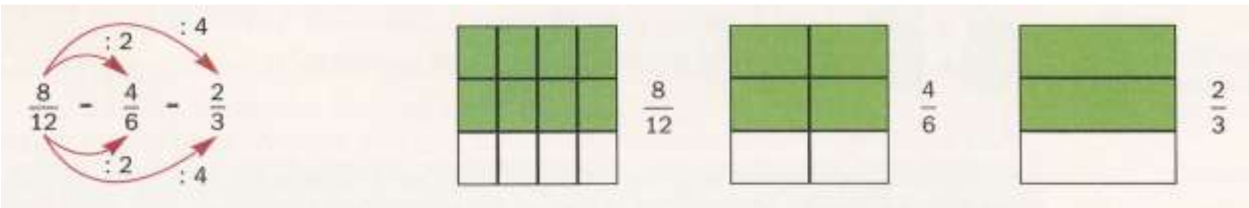

**<u>Actividad 11:</u> ¿Cómo harías con un número racional negativo?**

Todas aquellas fracciones que son expresiones del mismo número racional se llaman ***fracciones equivalentes***. Por ejemplo $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}$,... son todas expresiones de un mismo número racional y por lo tanto son fracciones equivalentes y podemos encontrar infinitas fracciones que representen tal número, para ello basta con que se multiplique numerador y denominador por un mismo número natural.

*Ejemplos*:




Otra familia de fracciones equivalentes:




Por lo tanto ***simplificar*** una fracción es obtener otra fracción equivalente más sencilla o más simple que la primera. En el ejemplo anterior, la fracción $\frac{8}{12}$ se simplificó, porque $\frac{2}{3}$ es una fracción equivalente a las anteriores, pero más sencilla. La fracción $\frac{2}{3}$ es irreducible porque no puede simplificarse, ya que el único divisor común entre numerador y denominador es 1.

## Expresiones decimales

Un número racional puede ser expresado de una forma llamada *"expresión decimal"*. Esta puede ser una expresión decimal finita ó una expresión decimal periódica infinita.

Analicemos en caso de los números racionales $\frac{6}{5}, \frac{5}{9} y \frac{113}{90}$ . Para saber cuál es la expresión decimal de ambos números, se realiza la división entre el numerador y el denominador. De acuerdo a ello tenemos:

$a)\frac{6}{5}=1{,}2$ $\qquad b)\frac{5}{9}=0{,}55555555......$ $\qquad c)\frac{113}{90}=1{,}255555555...$

En el **caso a)**, tenemos una expresión decimal con parte entera 1 y parte decimal 2. Vemos que la parte decimal tiene una cantidad finita de dígitos, en este caso tal cantidad es 1. Por ello $\frac{6}{5}$ tiene una ***expresión decimal finita***.

En el **caso b)**, tenemos una expresión decimal con parte entera 0 y como parte decimal el número 5 que se repite indefinidamente y se lo llama período, por lo tanto la cantidad de dígitos de la parte decimal se dice que es infinita y así $\frac{5}{9}$ tiene una ***expresión decimal periódica pura*** y se puede expresar como $0{,}\widehat{5}$.

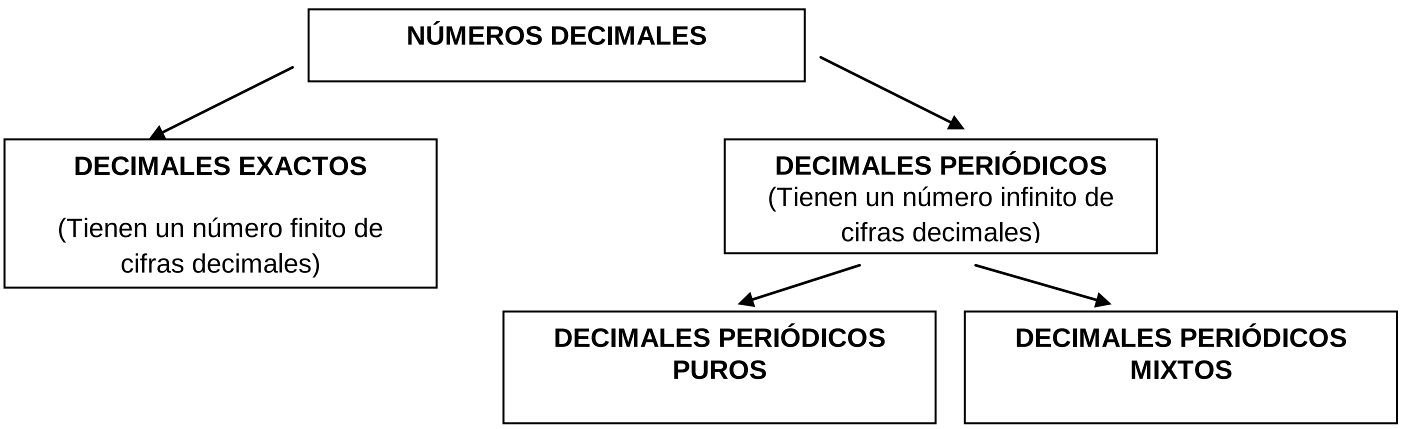
En el **caso c)**, tenemos una expresión decimal con parte entera 1 y como parte decimal el número 2 y un 5 que se repite indefinidamente, por lo tanto, al igual que en el caso anterior estamos en presencia de un número racional con ***una expresión decimal periódica mixta***, con la única diferencia de que en la parte decimal existen algunos dígitos precediendo al período y se puede encontrar escrito como $1{,}2\widehat{5}$

Notemos que en el caso a), también podemos ver a 1, 2 como una expresión decimal periódica infinita, donde el número que se repite indefinidamente es el 0, pues 1, 2 = 1, 20000000.... Pero en este caso puede omitirse la escritura de un período cero y así obtenemos solamente la expresión decimal finita.

Ahora bien, qué pasa si sucede lo contrario, es decir, tenemos un número decimal finito ó un número decimal periódico infinito, y queremos llevarlo a la expresión $\frac{a}{b}$ que es la que define a los números racionales.

**Entonces, a modo de resumen:**

Los números decimales, o expresiones decimales se clasifican de la siguiente manera:




<u>**Actividad 12**</u>**:** Expresa como decimal cada una de las siguientes fracciones y luego clasifícalos:

a) $\frac{2}{5}$ $\quad$ b) $\frac{8}{5}$ $\quad$ c) $-\frac{7}{4}$ $\quad$ d) $-\frac{1}{2}$ $\quad$ e) $\frac{1}{3}$ $\quad$ f) $\frac{13}{11}$ $\quad$ g) $\frac{45}{24}$ $\quad$ h) $-\frac{221}{99}$

**Actividad 13:** Ubica cada número decimal en la tabla según sean decimales exactos, periódicos puros o periódicos mixtos.

| | | |
|---|---|---|
| 1,529292929….. | -5,1212121212…. | $12,2\overset{\frown}{3}$ |
| 0,8955555….. | -1,7654 | $0,\overset{\frown}{7}$ |
| -7,44444444…. | -8,7897777777…. | 3,4 |
| 120,8 | 0,6767676767…. | |

| DECIMALES EXACTOS | DECIMALES PERIÓDICOS PUROS | DECIMALES PERIÓDICOS MIXTOS |
|---|---|---|
| | | |

Ahora nos toca hacernos la pregunta al revés: **¿Cómo expresar un número decimal como una fracción?**

Para responder, lee el siguiente **marco teórico**:

Escribir una expresión decimal exacta como fracción es muy sencillo, porque siempre es igual a un cociente de denominador 10 o 100, o 1.000, o ...

$$3,2 = \frac{32}{10} = \frac{16}{5} \qquad -1,05 = -\frac{105}{100} = -\frac{21}{20}$$

Si se quiere escribir una expresión decimal periódica como fracción, se puede hacer así:

$$1,2\overset{\frown}{57} = 1,25757...$$

$$\begin{array}{rl} & 1,25757... \cdot 1.000 = 1.257,5757... \\ - & 1,25757... \cdot 10 = 12,5757... \\ \hline & 1,25757... \cdot 990 = 1.257 - 12 \end{array}$$

$$1,25757... = \frac{1.245}{990}$$

O usar esta regla:

Todo el número sin coma MENOS lo que queda del número si se le tacha la parte periódica.

$$1,2\overset{\frown}{57} = \frac{1.257 - 12}{990} = \frac{1.245}{990}$$

Un 9 por cada decimal periódico y un 0 por cada decimal no periódico.

**Actividad 14:** Para practicar, expresa cada número propuesto en la **Actividad 13** como fracción (Luego podrías pasarlo a decimal para comprobar si tus cuentas son correctas)

## Operaciones con racionales

| OPERACIÓN | NUMERO FRACCIONARIO | NUMERO DECIMAL | PROPIEDADES |
|---|---|---|---|
| **SUMA** | Con **igual denominador**: se suman o restan los numeradores, según corresponda, y se repite el denominador. Ejemplo:<br>$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$<br>$\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1$<br>Con **distinto denominador**: se reemplazan por fracciones equivalentes que tengan igual denominador. Ejemplo:<br>$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$ | Para sumar o restar decimales, se encolumnan las unidades del mismo orden. Ejemplo:<br>$\begin{array}{r}1{,}09\\ 2{,}348\\ \hline 3{,}438\end{array}$<br>$\begin{array}{r}7{,}10\\ 5{,}32\\ \hline 1{,}78\end{array}$ | **Conmutativa**<br>$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$<br>**Asociativa**<br>$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}$<br>**Elemento neutro**<br>$0+\frac{2}{9}=\frac{2}{9}+0=\frac{2}{9}$<br>**Elemento opuesto**<br>$\frac{2}{9}+\left(-\frac{2}{9}\right)=0$ |
| **RESTA** | | | |
| **MULTIPLICA-CION** | **Procedimiento**: se multiplica numerador con numerador y denominador con denominador.<br>$\frac{1}{3}.\frac{9}{5}=\frac{1.9}{3.5}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$ | Se multiplican los números prescindiendo de las comas decimales. Luego se cuentan la cantidad de cifras decimales de los factores para ubicar la coma en el resultado.<br>6,23 . 0,2 = 1,246 | **Conmutativa**<br>$\frac{1}{2}.\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}$<br>**Asociativa**<br>$\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{5}.\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}.\frac{1}{5}\right).\frac{1}{3}$<br>**Elemento neutro**<br>$1.\frac{2}{9}=\frac{2}{9}.\ 1=\frac{2}{9}$<br>**Distributiva**<br>$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right).\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.\frac{1}{2}$<br>$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right).\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.\frac{1}{2}-\frac{1}{3}.\frac{1}{2}$ |
| | **Simplificar** es dividir el numerador y el denominador por un mismo número natural.<br>$\frac{1}{3}.\frac{9}{5}=\frac{1.3}{1.5}=\frac{3}{5}$ | | |
| | **Considerarse** como tomar "de". Es decir, $\frac{2}{3}\ de\ \frac{9}{10}=\frac{2}{3}.\frac{9}{10}$ | | |
| **DIVISION** | **Procedimiento**, dividir es lo mismo que multiplicar por la inversa de la segunda.<br>$\frac{3}{2}:\frac{1}{4}=\frac{3}{2}.\frac{4}{1}=6$ | Antes de dividir se deben multiplicar el dividendo y el divisor por una potencia de 10 adecuada, de tal manera que el cálculo se transforme en una división de números enteros.<br>0,25: 3,125 se multiplica por 1000<br>250 : 31252 = 0,08 | **Distributiva** solo a la derecha respecto de la suma y resta. |
| **POTENCIA** | **Definición**: se multiplica la base la cantidad de veces que indica el exponente. | Se usa la definición. O se puede expresar el decimal como fracción antes de elevarlo. | **Distributiva** con respecto a la multiplicación<br>$\left(\frac{1}{3}.\frac{9}{5}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2.\left(\frac{9}{5}\right)^2$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{5}.\frac{2}{5} = \frac{5}{4}$<br>**Propiedad**: la potencia es distributiva con respecto de la división, entonces se puede elevar el numerador y el denominador al exponente indicado<br>$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$ | $(1{,}32)^2 = 1{,}32\,.\,1{,}32$<br>$(1{,}5)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{,}25$ | Con respecto a la división<br>$\left(\frac{1}{3}:\frac{9}{5}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 : \left(\frac{9}{5}\right)^2$ |
| **RADICACION** | **Definición**: se busca un número que elevado al índice de cómo resultado el radicando.<br>$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$<br>**Propiedad**: la radicación es distributiva con respecto de la división, entonces se puede calcular la raíz del numerador y del denominador:<br>$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$ | Se usa la definición. O se puede expresar el decimal como fracción antes de elevarlo.<br>$\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$<br>$\sqrt{0{,}04} = \sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{2}{5} = 0{,}2$ | **Distributiva** con respecto a la multiplicación<br>$\sqrt{\frac{25}{16}.\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25}{16}}.\sqrt{\frac{1}{4}}$<br>$\frac{5}{4}.\frac{1}{2} = \frac{5}{8}$<br>Con respecto a la división<br>$\sqrt{\frac{25}{16}:\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25}{16}}:\sqrt{\frac{1}{4}}$<br>$\frac{5}{4}:\frac{1}{2} = \frac{5}{8}$<br>Esta propiedad se cumple solo cuando las raíces pueden resolverse |

**Actividad 15: Para practicar las operaciones**

1) Resuelve:

a) $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=$ b) $0{,}75+2+\frac{1}{3}=$ c) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=$

d) $0{,}6-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=$ e) $\frac{2}{3}+\frac{5}{17}.\left(\frac{2}{3}-0{,}1\right)=$ f) $\frac{1}{2}.\left(2-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{6}=$

g) $1-\frac{2}{3}.\left(0{,}5+\frac{5}{6}\right)=$ h) $\frac{1}{7}+0{,}2.2-\frac{4}{7}=$ i) $\frac{1}{5}+3.\frac{15}{9}-\frac{3}{2}=$

2) Escribe como fracción y luego opera:

a) $0{,}2\widehat{7}+2{,}\widehat{3}$

b) $3{,}\widehat{3}-2{,}\widehat{2}\widehat{7}$

c) $1{,}\widehat{2}\;.\;2{,}\widehat{5}\widehat{1}$

d) $\sqrt[3]{\left(-\frac{4}{7}\right)^0-\left[\frac{2}{3}+\left(0{,}\widehat{3}\right)^3\right]}$

# LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Ahora nos preguntamos, ¿qué pasa con un número con parte decimal infinita no periódica como por ejemplo 1, 0100100010000100001....?. La respuesta es que dicho número no podrá ser expresado como fracción. Por lo tanto existen números, que no pertenece a los números racionales. Y pasarán a formar parte de un nuevo conjunto numérico, llamado ***números irracionales***.

Como ejemplo de números irracionales tenemos a:

- Las raíces de números que no son cuadrados perfectos, como ser $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ y en general las raíces no enteras de números enteros, como ser $\sqrt[3]{-10}$ , etc
- Las expresiones de la forma 2, 151551555155551555551... Donde en la parte decimal (infinita) no podemos identificar ningún período. Algunos famosos como:
  - El llamado número de oro, que fue utilizado en la antigüedad por arquitectos, pintores y escultores para lograr armonía y belleza en sus obras, es simbolizado con la letra φ (fi) en honor al escultor griego Fidias. Se trata de
  $$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
  - El conocido número que simboliza la razón o cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, fue simbolizado por los griegos con la letra π (pi), por ser la letra inicial de la palabra "periferia". Una aproximación de tal número es π ≅ 3, 1416.

## Representación de números irracionales

En esta ocasión estudiaremos la representación de algunos números irracionales, en particular las raíces cuadradas de naturales que nos son cuadrados perfectos, como ser $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ , etc.

Antes de ello, recordemos el teorema enunciado por Pitágoras de Samos, un matemático griego del siglo VI. Pitágoras enunció que: en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

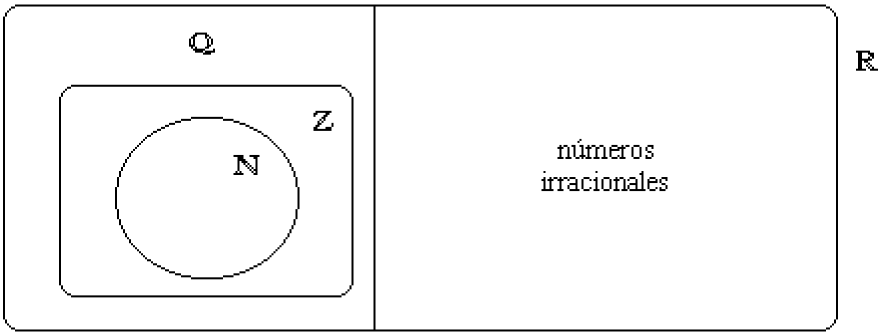
Veamos si guiándote por el enunciado de este teorema, eres capaz de representar el número irracional $\sqrt{2}$ en la recta real.

**<u>Actividad 16:</u> Traza la recta real, en ella**

**a) ubica el 0, elige una escala e indica la unidad.**
**b) b) Dibuja un triángulo rectángulo con uno de sus catetos igual a 1 sobre la recta real y el otro también igual a 1 perpendicular a la recta real que pase por la unidad.**
**c) Traza la hipotenusa. ¿Cuánto mide?¿Por qué?**
**d) Si pudiste responder a la pregunta de c), solo te falta hacer centro**
**e) con el compás en 0 y trasladar el segmento de la hipotenusa sobre la recta real.**
**f) Una vez hayas entendido el procedimiento descripto de a) a d), intenta tú solo graficar $\sqrt{5}$**

# LOS NÚMEROS REALES

Ahora llegamos al mayor conjunto con el que vamos a trabajar por ahora. Este contiene en sí mismo a todos los conjuntos anteriores. Se representa como *R*.




## Propiedades de los números reales

En el conjunto de los Números Reales tenemos los siguientes los siguientes axiomas (son como las leyes de las que hablamos al principio):

| | Con respecto a la suma | Con respecto al producto |
|---|---|---|
| Ley de cierre $\forall a,b \in \Re$ | $(a+b) \in \Re$ | $(a.b) \in \Re$ |
| Ley conmutativa $\forall a,b \in \Re$ | $a+b=b+a$ | $a.b=b.a$ |
| Ley asociativa $\forall a,b,c \in \Re$ | $(a+b)+c=a+(b+c)$ | $(a.b).c=a.(b.c)$ |
| Existencia del elemento neutro: $\exists e \in \Re$ tal que $\forall a \in \Re$ | $a+e=e+a=a$<br>en este caso $e=0$ | $a.e=e.a=a$<br>en este caso $e=1$ |
| Existencia del elemento inverso | $\forall a,b \in \Re, \exists -a \in \Re$<br>$a+(-a)=(-a)+a=0$ | $\forall a,b \in \Re, a \neq 0, \exists a^{-1} \in \Re$<br>$a.(a^{-1})=(a^{-1}).a=1$ |

En estas propiedades aparecen en su representación simbólica, una serie de símbolos que vas a ver muy seguido de ahora en adelante. Sus significados son:

- ∈→es el símbolo de pertenencia. El elemento que aparece a la izquierda del símbolo "pertenece" al conjunto que está a la derecha del mismo.
- ∀ → se lee "para todo", e indica que "todos" los elementos que aparece a continuación cumplen con alguna condición.
- ∃ → se lee "existe algún", e indica que alguno de los elementos descriptos a continuación cumple con algo.

➢ Una *propiedad* que vincula a estas dos operaciones es la llamada Propiedad Distributiva del Producto con respecto a la Suma

$$\forall a, b, c \in R,\ a . (b + c) = a.b + a.c$$

➢ ***Potenciación*** de los números reales

Definimos $a^n = \underbrace{a.a.a....a}_{n \text{ veces}}$ donde $a$ es un número real al que denominaremos ***base*** y $n$ es un número racional que llamaremos ***exponente***.

Se **resuelve**: multiplicando la base la cantidad de veces que lo indique el exponente.

Ejemplo:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81}$$

Por convención se tiene: $a^0 = 1$ ; $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$

Ejemplo:

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

**Radicación** de los números reales

Definimos $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$ donde: $n$ es un número natural.

$\sqrt[n]{a}$ se lee raíz n-ésima de $a$ .

Denominamos a $n$ ***índice*** de la raíz, y $a$ ***radicando***.

Se **resuelve**: buscando un número que elevado al índice de cómo resultado el radicando

Observemos que para que la definición tenga sentido,

- si $n$ es par, $a$ debe ser un número real positivo,
- si $n$ es impar, $a$ puede ser cualquier número real.

Ejemplos:

a) $\sqrt[3]{-27} = -3$ pues $(-3)^3 = -27$

b) $\sqrt[4]{81} = 3$ pues $3^4 = 81$

La raíz n-ésima de un número suele también denotarse como potencia $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Además $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$ si $a \geq 0$ .

***Observación***: Si $a < 0$, esta afirmación no siempre tiene sentido, ya que pueden presentarse casos como el siguiente:

$(-3)^{4/2} = \sqrt{(-3)^4}$ pero $(-3)^{4/2} = ((-3)^{1/2})^4 = \left(\sqrt{-3}\right)^4$ no tiene sentido en el conjunto R.

## PROPIEDADES DE LA POTENCIA Y LA RADICACIÓN

| | | |
|---|---|---|
| **Potencias** | 1. **Producto de potencias con la misma base**: se repite la base y se suman los exponentes | $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ |
| | 2. **Cociente de potencias con la misma base**: se repite la base y se restan los exponentes | $a^m : a^n = a^{m-n}$ |
| | 3. **Potencia de una potencia**: se repite la base y se multiplican los exponentes | $(a^m)^n = a^{m.m}$ |

| | | |
|---|---|---|
| | 4. **Potencia de un producto**: se eleva cada uno de los factores a esa potencia | $(a\,.\,b)^n = a^n\,.\,b^n$ |
| | 5. **Potencia de un cociente**: se eleva el divisor y el cociente a esa potencia | $(a : b)^n = a^n : b^n$ |
| | 6. P**otencia con exponente negativo**: se invierte la base y se eleva a un exponente de igual valor absoluto pero positivo. | $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ |
| **Raíces** | 1. **Producto de radicales con el mismo índice**: se distribuye la raíz para cada factor. | $\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$ |
| | 2. **Cociente de radicales con el mismo índice**: se distribuye la raíz para el divisor y el cociente. | $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$ |
| | 3. **Raíz de una raíz**: raíz con índice el producto de los índices. | $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$ |
| | 4. **Potencia de un radical**: | $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ |

## Racionalización de denominadores.

Cuando quitamos las raíces del denominador de un número fraccionario, decimos que estamos racionalizando.

Veamos los siguientes casos que se pueden presentar a través de ejemplos:

• En el denominador figura una raíz cuadrada

$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.\underbrace{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}_{1} = \frac{2\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ (Observa que la idea es que estás multiplicando por 1 que es el elemento neutro del producto por lo que no te altera el ejercicio)

• En el denominador figura una raíz que no es cuadrada

$\frac{2}{\sqrt[7]{5^2}} = \frac{2}{\sqrt[7]{5^5}}.\underbrace{\frac{\sqrt[7]{5^5}}{\sqrt[7]{5^5}}}_{1} = \frac{2\sqrt[7]{5^5}}{\sqrt[7]{5^2}.\sqrt[7]{5^5}} = \frac{2\sqrt[7]{5^5}}{\sqrt[7]{5^2.5^5}} = \frac{2\sqrt[7]{5^5}}{\sqrt[7]{5^7}} = \frac{2\sqrt[7]{5^5}}{5}$ (¿Por qué elige multiplicar y dividir por $\sqrt[7]{5^5}$ ?, ¿qué propiedades de la potencia y de la radicación se pretende aplicar?)

## Actividades

1) Decidir si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifiquen.
   a. Entre dos números racionales, existen infinitos racionales
   b. Todo número racional tiene inverso multiplicativo
   c. $\frac{0}{5} = 0$
   d. $\frac{4}{0}$ $no\ está\ definido$
2) Encuentre el número decimal que es equivalente al número dado.
   a. $\frac{7}{8}$
   b. $\frac{7}{11}$
   c. $\frac{3}{500}$
   d. $5\frac{2}{3}$
   e. $\frac{1}{9}$
   f. $3\frac{3}{7}$
   g. $14\ \frac{2}{5}\%$
   h. $102\%$

3) Encuentre una fracción que sea equivalente a cada uno de los números dados:
   a. 0,444…..
   b. 3,0230230...
   c. 0,76
   d. 1,21414…..
   e. 4,5
   f. -1,9999
4) Un avión viaja a una velocidad promedio de 400 km/h tarda en volar de que una ciudad A hacia otra C haciendo escala en B un total de 4h 45\`
   Sabiendo que el trayecto entre A y B insume las dos terceras partes del tiempo efectivo de vuelo, y que la escala en C es de 15':
   a) Calcule los tiempos que demora en ir de A hacia B y de b hacia C
   b) Determine las distancias que separan a las tres ciudades entre sí.
5) El tanque A contiene a litros de solución de alcohol al 50%. El tanque B contiene b litros de otra solución al 20%. Expresar en términos de a ó b ó como un número lo siguiente:
   a. El número de litros de alcohol en el tanque A.
   b. El número de litros de alcohol en el tanque A y B
   c. El número de litros de alcohol en 9 litros de solución sacada del tanque B
   d. El número total de litros de alcohol contenidos en una mezcla de 150 litros extraídos del tanque A y 225 litros extraídos del tanque B.
6) Dos trenes salen de una misma cuidad al mismo tiempo; uno hacia este y el otro hacia el oeste. El tren que va hacia el este viaja a de 10km por hora menos que el que va hacia el oeste. Sea v la velocidad del tren que va hacia el oeste. Expreso lo siguiente en términos de v:
   a. La velocidad del tren que va hacia el oeste
   b. La distancia recorrida en 4h por el tren que va hacia el este
   c. La distancia recorrida en 4h por el tren que va hacia el oeste
   d. La distancia total recorrida por los dos trenes en 4h
7) Efectúa las operaciones indicadas y simplifique
   a. $\frac{3^4-3^2}{3^2}$
   b. $\frac{-3^2}{(1-4)^3}$
   c. $\frac{(3^2)^3}{9^3}$
   d. $\frac{[(-2)^4]^4}{2^{16}}$
   $e.\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2$
   $f.\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}$
   $g.(3^{-1}.2^{-3})^{-3}$
   $h.\frac{\sqrt[3]{2}.2^{\frac{5}{2}}}{\sqrt[5]{8}}$
8) Simplifique las siguientes expresiones
   a. $\left(\frac{3^{-3}.m^2.p^{-3}}{9^{-1}.m^{-3}.p^2}\right)$
   b. $\frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}$
   c. $\frac{15.x^{\frac{1}{4}}.y^{-\frac{1}{2}}}{3.x^{-\frac{1}{4}}.y}$
   $d.\frac{\sqrt[5]{7^2}.\sqrt{7}.7^2}{7^{\frac{3}{4}}.7}$
   $e.\left(\frac{8.x^3.y^{-\frac{4}{3}}}{27.x^{-6}.y}\right)$
   $f.\frac{\sqrt[3]{2}.2^{\frac{5}{2}}}{\sqrt[5]{8}}$

# NOTACIÓN CIENTÍFICA

Los exponentes enteros con frecuencia se utilizan para escribir números muy grandes ó muy pequeños de una forma conveniente.

Cualquier número real positivo puede escribirse de la forma

$$a.10^n \quad \text{donde} \quad 1 \leq a < 10$$

(Presta atención!!!), y n un número entero. Decimos que un número escrito así está en *notación científica*.
Por ejemplo:

- $1000000 = 1.10^6$ Compara el exponente con el número de ceros
- $0{,}00000000432 = 4{,}32.10^{-9}$ Compara el exponente con el número de lugares que se corrió la coma

**Actividad 17: ¿Sería correcto expresar** $0{,}00000000432 = 43{,}2.10^{-10}$ **? ¿Por qué?**

**Actividad 18: Resolver las siguientes utilizando y expresando el resultado en notación científica:**

a) $800\,000 . 40\,000 =$

b) $0{,}000006 : 2\,000 =$

c) $\dfrac{150\,000 . 0{,}0000004}{80\,000} =$

d) $\dfrac{0{,}00000024 . 0{,}0002}{0{,}000016} =$

e) $\dfrac{360\,000\,000 . 0{,}000005}{0{,}006 . 200} =$

f) $\dfrac{400\,000 . 630\,000\,000}{9\,000\,000 . 0{,}0007} =$

g) $\dfrac{0{,}0000024}{80\,000} : \dfrac{1\,200\,000}{0{,}0003} =$

**Actividad 19: Resolver las actividades 15 y 18 usando la calculadora**.

# NÚMEROS COMPLEJOS

Son expresiones $(a + bi)$, donde $a\ y\ b$ son números Reales. Esta es la forma binómica de un número complejo.

El número $a$ se llama ***parte Real***. El término $bi$ se llama ***parte Imaginaria***.

*Ejemplo*:

$5 + 3i \ \rightarrow 5\ es\ la\ parte\ real, 3\ la\ parte\ imaginaria$

$-7 + 4i \ \rightarrow -7\ es\ la\ parte\ real, 4\ la\ parte\ imaginaria$

-1$-i \ \rightarrow -1\ es\ la\ parte\ real, -1\ la\ parte\ imaginaria$

**Características**

- Dos números complejos son iguales si y sólo si lo son simultáneamente sus partes reales y sus partes imaginarias.
- El cuerpo de los complejos **no es un cuerpo ordenado**. No puede darse en C una relación de orden total que respete las operaciones de suma y producto. No tiene por tanto sentido comparar dos números complejos en la manera en que estamos acostumbrados a hacer con los reales.

- El conjunto de los números complejos es un conjunto **algebraicamente cerrado.**

**Casos especiales**:

- Los complejos, que tienen la parte Imaginaria nula, es decir si $b = 0$, el número complejo se reduce a un **número real**, ya que:$a + 0i = a$
- Si $a = 0$, el número complejo se reduce a: 0+$bi = bi$, es un **Número Imaginario puro.**
- Si $a = 0 \; y \; b = 0$, resulta el Número Complejo 0+$0i$, que es el **Número Complejo cero**, y se escribe 0.

Podemos decir que todo número real puede considerarse como Número Complejo con parte imaginaria cero, es decir: $a + 0i = a$

Con lo visto hasta ahora podemos decir que el conjunto de los números reales son un subconjunto de los números complejos (C). Es decir $R \subset C$.

**Definiciones importantes:**

- **Conjugado** de un número complejo $z = a + bi$ está definido por el número complejo $\bar{z} = a - bi$.

  *Ejemplo*: Sea $z = 3 + 2i$, entonces su conjugado es: $\bar{z} = 3 - 2i$. (Solo se cambia el signo de la parte imaginaria)

- **Unidad Imaginaria** $(i)$: Llamaremos *unidad Imaginaria* de un número complejo al número $\sqrt{-1}$ que se representa con la letra $i$.

## Operaciones:

Con la unidad imaginaria se pueden realizar operaciones.

- $i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$
- *Suma:* $2i - 5i + 8i = (2 - 5 + 8)i = 5i$
- *Producto*: $2.(3i) = 6i$
- *Propiedad distributiva* de la potencia con respecto al producto: $(2i)^2 = 2^2.i^2 = 4.(-1) = -4$

## Suma y Resta de números complejos

Para sumar o restar números complejos tenemos que sumar o restar por separado las partes reales y las partes imaginarias.
En símbolo sería:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (bi + di)$$

Ejemplo:

$$(3 - 2i) + (5 + 6i) = (3 + 5) + (-2i + 6i) = 8 + 4i$$

## Multiplicación de números complejos

Se aplica la propiedad distributiva como si se tratara de números Reales.
En símbolos sería:

$$(a + bi).(c - di) = (ac - bd).(a.d + b.c)i$$

Ejemplo:

$$(3 + 4i).(2 - 5i) =$$
$$3.2 - 3.5i + 4i.2 - 4i.5i =$$
$$6 - 15i + 8i - 20.i^2 =$$

$$6-15i+8i-20.(-1)=$$
$$6-15i+8i+20=$$
$$(6+20)+(-15i+8i)=$$
$$26-7i$$

## División de números complejos

Para dividir un número complejo por otro número complejo, vamos a multiplicar al numerador y al denominador por el conjugado del denominador.
En símbolos:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1}{z_2}.\frac{\overline{z}_2}{\overline{z}_2}$$

Ejemplo:

$$\frac{-5+3i}{2-i}=\frac{-5+3i}{2-i}.\frac{2+i}{2+i}=\frac{-10-5i+6i+3i^2}{2^2+1^2}=\frac{-13+i}{5}=-\frac{13}{5}+\frac{1}{5}i$$

## Inverso multiplicativo de un Número Complejo

Es otro Número Complejo, tal que cuando multiplico a ambos me da por resultado 1. Es decir:

El inverso del Número Complejo $(a+bi)$ es: $\frac{a-bi}{a^2+b^2}$

Ejemplo:

El inverso de $4-2i$ es: $\frac{4-(-2i)}{4^2+(-2)^2}=\frac{4+2i}{16+4}=\frac{4+2i}{20}=\frac{4}{20}+\frac{2}{20}i=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}i$

Ahora verifiquemos que:

$$(4-2i).\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}i\right)=1$$

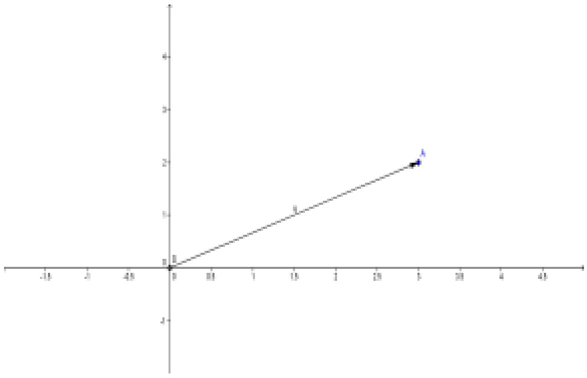
$$(4-2i).\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}i\right)=\frac{4}{5}+\frac{4}{10}i-\frac{2}{5}i-\frac{2}{10}i^2=\frac{4}{5}+\frac{2}{5}i-\frac{2}{5}i-\frac{1}{5}(-1)=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=\frac{5}{5}=1$$

## Representación gráfica de un número complejo

Los números complejos se representan en un plano infinito que llamaremos **plano complejo**, de modo que la parte real se represente en el eje de abscisas, llamado **EJE REAL ( el** de las abscisas (eje x)), y la parte imaginaria en el eje de ordenadas (eje y), llamado **EJE IMAGINARIO**.

Ejemplo: Graficamos el número complejo $z=3+2i$

PLANO COMPLEJO



El punto (a,b) determina con el origen de coordenadas un vector, al que llamaremos **Vector Posición** del número complejo $a+bi$

## Módulo de un Número Complejo

El ***módulo*** de un Número Complejo $z = (a + bi)$ es la longitud del Vector posición. Se simboliza entre barras y se calcula con el teorema de Pitágoras. En símbolos:

$$z = a + bi \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

## Actividades

1) Realizar las siguientes operaciones:
   a. $(-3 - 2i) + (-1 - i) =$
   b. $(-1 - 2i) + \left(\frac{4}{5} - 2i\right) =$
   c. $\left(\frac{1}{3} + 1i\right) - \left(1 - \frac{1}{4}i\right) =$
   d. $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}i\right) - \left(\frac{5}{8} - \frac{3}{10}i\right) =$
   e. $(5 - 5i).\left(\frac{4}{5} - i\right) =$
   f. $(2 + 2i).\left(\frac{1}{2} - 2i\right) =$
   g. $\left(\frac{13}{6} - \frac{13}{6}i\right):\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i\right) =$
   h. $\left(-\frac{17}{5} - \frac{17}{15}i\right):\left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{3}i\right) =$

2) Sea z = 2-5i, 1+5.5i, 6+3i, 1+3i, 3.5+2i y w= -1+i, 0.5+0.5i, -1-1.5i, -2+0.5i, 0.5+2i.
   Calcular:
   a. z + w
   b. z . w
   c. z/w.

3) Sean:

$$z_1 = 4 - 1 \qquad z_2 = 3 + i \qquad z_3 = -3 + 2i \qquad z_4 = -1 - 2i \quad z_5 = 1 + 3i$$

Hallar:

$$\overline{z_1}.z_2 + z_2.\overline{z_2} - z_3.\overline{z_3} =$$

$$\overline{z_1 + z_2 + z_3 + z_4} =$$

$$\overline{z_1 + (z_2 - z_5)} - z_4 - \overline{z_1} =$$

$$z_5 + \overline{z_1} - (z_2.\overline{z_2}):(\overline{z_5}.z_5) =$$

4) A) Representa los siguientes números complejos: -3i, 2-3i, -3+i, 4, -5, 4i, 3+4i.
   B) Observa dónde aparecen representados los números reales y los números imaginarios puros.